УДК 519.624

И. Ф. Соловьева
Белорусский государственный технологический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТРИЦ ЯКОБИ И ЧИСЕЛ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

В рассматриваемой работе для решения нелинейных граничных задач предлагается метод множественной двусторонней пристрелки, позволяющий заменить процесс численного решения граничной задачи решением нескольких задач Коши. Для решения задач строятся вычислительные схемы метода множественной двусторонней пристрелки. Они включают в себя процедуру решения задач Коши в прямом и обратном направлениях. Для этого выбираются пристрелочные подынтервалы. В статье показано, что выбор числа и длин подынтервалов пристрелки обеспечивает необходимые свойства и качества задач Коши, для решения которых существуют в настоящее время хорошо работающие методы. В ходе решения данной проблемы составляется матрица Якоби и исследуются ее свойства. Для пристрелочных задач Коши строится замыкающая система уравнений, которая получается достаточно низкого порядка. Определяются границы спектра матрицы Якоби и вычисляются их числа обусловленности. Предлагаемая методика позволяет решать широкие классы нелинейных граничных задач, в том числе и прикладного характера.

Ключевые слова: малый параметр, пограничный слой, двухточечные граничные задачи.

I. F. Solov’yeva
Belarusian State Technological University

THE RESEARCH OF JACOBI MATRICES AND CONDITION NUMBERS FOR SOLVING NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS

In this paper for solving nonlinear boundary value problems we propose a method of multiple two-way adjustment. This method allows you to process the numerical solution of the boundary problem to replace several solutions for the Cauchy-cottages. To solve the problems of computational schemes are built using multiple two-way adjustment. They include a procedure for solving the Cauchy problems in both forward and reverse directions. For this sighting purpose sub-ranges were selected. The article shows that the choice of the number and lengths of the subintervals zeroing provides a necessary and quality of the Cauchy problem, for the solutions of which well working methods exist at the present time. In the course of solving this problem Ritz-Jacobi matrix is made and its properties are investigated. For sighting Cauchy problem closing system of equations, constructed which can be obtained of a quite a low order. Define the boundaries of the spectrum of the Jacobi matrix are defined and their condition numbers are calculated. The proposed method allows to solve a wide class of nonlinear boundary value problems, including an applied research.

Key words: small parameter, boundary layer, the two-point boundary value problems.

Введение. В настоящее время проблемы разработки и исследования новых методов численного решения граничных задач очень разнообразны, актуальны и значимы. Интерес к ним достаточно высок.

Это объясняется следующими причинами: рассмотрением новых классов задач, в том числе и прикладных, к решению которых имеющиеся алгоритмы неприменимы или их использовать на практике недостаточно эффективно, необходимостью более глубокого изучения новых и уже существующих алгоритмов с целью выявления их действительных возможностей, улучшения их вычислительных свойств и расширения их области применения. Проблеме численного решения нелинейных двухточечных граничных задач с пограничными слоями уделяется в настоящее время все большее внимание.

В ряде случаев при решении нелинейных граничных задач интересной является идея построения итерационных процессов таким образом, чтобы они приводили к необходимости численного решения только задач линейного вида, и чтобы итерационная последовательность приближенных решений этих линейных задач сходилась к искомому решению исходной нелинейной задачи.

Постановка задачи. Пусть задана нелинейная двухточечная задача с неразделенными граничными условиями:

$$y' = f(t, y), a \le t \le b, \tag{1}$$

$$g(y(a), y(b)) = 0, \tag{2}$$

где

$$y : [a, b] \to R^n, f : [a, b] \times R^n \to R^n,$$
$$g : R^n \times R^n \to R^n.$$

Построение алгоритма метода множественной двусторонней пристрелки преследует в основном такие цели, как улучшение свойств пристрелочных траекторий, уменьшение числа неизвестных, ослабление условий на локализацию начальных приближений.

В данной статье будем рассматривать метод множественной двусторонней пристрелки, позволяющий заменить процесс численного решения граничной задачи решением нескольких задач Коши. Методы такого рода называют методами редукции граничных задач к задачам Коши. Сильной стороной такого подхода к решению граничных задач является тот момент, что для решения задач Коши в настоящее время можно применять сильно развитые, хорошо работающие и имеющие полное математическое обеспечение численные методы [1].

При решении указанного выше типа задач стандартными численными методами возникают большие трудности, причина которых чаще всего заключается в неустойчивости численного процесса. В качестве специальных методов будем рассматривать метод множественной двусторонней пристрелки, обладающий необходимой гибкостью.

Для исследования сходимости метода множественной двусторонней пристрелки важное значение имеет понятие изолированности решения задачи (1), (2).

Определение. Решение граничной задачи (1), (2) называется изолированным, если выполняются условия:

$$\det\left[\frac{\partial g\,(y(a),y(b))}{\partial\, y(a)}+\frac{\partial g\,(y(a),y(b))}{\partial\, y(b)}\Phi(a)\right]\neq 0,$$

$$\det\left[\frac{\partial g\,(y(a),y(b))}{\partial\, y(a)}+\frac{\partial g\,(y(a),y(b))}{\partial\, y(b)}\Phi(b)\right]\neq 0$$

на точном решении задачи (1), (2). Функция $\Phi(t)$ – это матричное решение задачи Коши

$$\Phi'(t)=\frac{\partial f(t,y(t))}{\partial y}\Phi(t),\qquad \Phi(a)=E,$$

где $a\le t\le b,$ взятое при $t=b.$

Алгоритм метода множественной двусторонней пристрелки. Предлагаемый метод множественной двусторонней пристрелки состоит в следующем.

Разбиваем отрезок на совокупность точек. Назовем их точками пристрелки:

$$a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{2m-1}<t_{2m}=b.$$

Множественную пристрелку организовываем таким образом, чтобы вычислительный процесс развивался в обоих направлениях.

Пристрелочные задачи Коши построим в прямом и обратном направлениях:

$$\begin{cases} u'=f(t,u),\ t\in J_{2j-1}^{(+)}=\{t_{2j-1}\le\ t\ \le t_{2j}\};\\ u(t,\,y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}}=y_{2j-1},\quad y_{2j-1}\in R^n,\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases} v'=f(t,v),\quad t\in J_{2j-1}^{(-)}=\{t_{2j-1}\ge t\ge t_{2j-2}\},\\ v(t,\,y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}}=y_{2j-1},\ y_{2j-1}\in R^n,\ j=\overline{1,m},\end{cases}\tag{4}$$

где t_{2j-1} – точки пристрелки; t_{2j} – точки сшива решений; y_{2j-1} – параметры пристрелки.

Для полученных пристрелочных задач Коши составляем замыкающую систему уравнений вида

$$\begin{cases} u(t_{2j},y_{2j-1})-v(t_{2j},y_{2j+1})=0,\quad j=\overline{1,m},\\ g(v(t_0,y_1),u(t_{2m},y_{2m-1}))=0.\end{cases}\tag{5}$$

Обозначим:

$$z=(y_1^T,\ y_2^T,\ \ldots,y_{2m-1}^T)^T.$$

Перепишем замыкающую систему вида (5) в операторной форме

$$H(z)=0,\tag{6}$$

где

$$H:R^N\to R^N,\quad N=m\times n.$$

Свойства замыкающих систем уравнений (5), (6) зависят от правой части *f*, исходного уравнения, формы граничных условий, области интегрирования $[a,\,b]$, точек пристрелки $u(t,y_{2j-1})$ и траекторий пристрелки $u(t,y_{2j-1})$, $v(t,y_{2j-1})$. Эти свойства наиболее полно характеризуются матрицами Якоби для соответствующих отображений *H*.

Для замыкающей системы уравнений (5) матрица Якоби будет иметь вид

$$\frac{\partial H}{\partial z}=\begin{bmatrix}\Phi_2^{(k)} & -\Omega_2^{(k)} & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \Phi_4 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \Phi_{2m-2}^{(k)} & -\Omega_{2m-2}^{(k)}\\ G_1^{(k)} & 0 & \ldots & 0 & G_{2m-1}^{(k)}\end{bmatrix},$$

$$\Phi_{2j}^{(k)}=\frac{\partial v(t_{2j},y_{2j-1}^{(k)})}{\partial y_{2j-1}},\quad \Omega_{2j}^{(k)}=\frac{\partial u\,(t_{2j},y_{2j+1})}{\partial y_{2j+1}},$$

$$G_1^{(k)}=\frac{\partial g(P_{0,2m}^{(k)})}{\partial u}\Omega_0,\quad G_{2m-1}^{(k)}=\frac{\partial g\,(P_{0,2m}^{(k)})}{\partial v}\Phi_{2m}^{(k)}.$$

Пусть $y(t)$ – искомое решение исходной граничной задачи. Введем обозначения:

$$z^*=(y_1^{*T},\ \ldots,y_{2m-1}^{*T})^T.\tag{7}$$

Понятно, что $H(z^*)=0$, где z^* – решение исходной системы (1), (2).

Обозначим k-е приближение к решению z^*:

$$z^{(k)}=(y_1^{(k)T},\ y_3^{(k)T},\ ...,y_{2m-1}^{(k)T})^T\in R^n.$$

Все оставшиеся приближения найдем, применяя модифицированный метод Ньютона, основанный на аппроксимации матрицы Якоби:

$$\frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z}\Delta z^{(k)}=-H(z^{(k)}).$$

Теперь искомое решение $y(t)$ исходной граничной задачи представляем формулой

$$y(t)=\begin{cases} v(t,\ y^*_{2j-1}), & t\in J^{(-)}_{2j-1}, \\ u(t,\ y^*_{2j-1}), & t\in J^{(+)}_{2j-1}, \quad j=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{8}$$

В случае прямого направления матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши будут иметь вид

$$\begin{cases} U'_{2j-1}(t)=\Phi_{2j-1}(u)U_{2j-1}(t), \\ U_{2j-1}(t_{2j-1})=I, \quad t\in J^{(+)}_{2j-1}, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \Phi_{2j-1}(u)=\dfrac{\partial f(t,\ u(t,\ y_{2j-1}))}{\partial u}, \\ U_{2j-1}(t)=\dfrac{\partial u(t,\ y_{2j-1})}{\partial u}. \end{cases} \tag{10}$$

Аналогичным образом получаем матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши, решаемых в обратном направлении:

$$\begin{cases} V'_{2j-1}(t)=\Phi_{2j-1}(v)V_{2j-1}(t), \\ V_{2j-1}(t_{2j-1})=I, t\in\ J^{(-)}_{2j-1}, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} &\Phi_{2j-1}(v)=\frac{\partial f(t,\ v(t,\ y_{2j-1}))}{\partial v}, \\ &V_{2j-1}(t)=\frac{\partial v(t,\ y_{2j-1})}{\partial y_{2j-1}}, \quad j=\overline{1,m}, \end{aligned} \tag{12}$$

причем

$$\begin{cases} U^{(2j)}_{2j-1}=U_{2j-1}(t_{2j}), \\ V^{(2j-2)}_{2j-1}=V_{2j-1}(t_{2j-2}). \end{cases} \tag{13}$$

Построим последовательные приближения:

$$z^{(k+1)}=z^{(k)}+\Delta z^{(k)}, \quad k=0,1,2,... \tag{14}$$

Найдем поправки $\Delta z^{(k)}$ в методе Ньютона:

$$\Delta z^{(k)}=(\Delta z_1^{(k)T},\ \Delta z_3^{(k)T},\ ...,\Delta z_{2m-1}^{(k)T})^T, \tag{15}$$

где

$$H=(h_1^{(k)},h_3^{(k)},...,h_m^{(k)})^T, \quad h_i^{(k)}=h_i(z^{(k)}).$$

На точном решении z^* выполняется неравенство

$$\det D_m(z^*)\neq 0$$

и, следовательно, решение граничной задачи изолировано. Значит, при хорошем начальном приближении $z^{(0)}$ нетрудно обеспечить сходимость метода Ньютона. Вычислительные свойства метода Ньютона достаточно сильно зависят от свойств матрицы Якоби $\dfrac{\partial H}{\partial z}$. Свойства матрицы Якоби, в свою очередь, определяются числом и длинами положительных $J^{(+)}_{2j-1}$ и отрицательных $J^{(-)}_{2j-1}$ подынтервалов пристрелки. Такая зависимость во многих случаях дает наглядную картину решения задач с пограничным слоем.

Для замыкающей системы уравнений в задаче Троеша [2] можно конкретизировать матрицу Якоби. Запишем ее в следующем виде:

$$\frac{\partial H(z^k)}{\partial z}=\begin{bmatrix} \Phi_2^{(k)} & -\Omega_2^{(k)} \\ G_1^{(k)} & G_3^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Введем обозначения

$$H_0=\frac{\partial H(z^{(0)})}{\partial z}$$

и образуем матрицу $B=H_0^T H_0$.

Вычислим числа обусловленности матрицы H_0. Для этого определим верхнюю и нижнюю границы матрицы B:

$$z^{(k+1)}=B\left(\frac{z^{(k)}}{\left\|z^{(k)}\right\|}\right),\ k=0,1,2,...,z^{(k)}\in R^4. \tag{16}$$

Верхнюю границу $\beta(B)$ матрицы B найдем по правилу:

$$\beta(B)=\lim_{k\to\infty}\left\|z^{(k)}\right\|, k=0,1,2,... \tag{17}$$

Введем обозначения:

$$C=\beta(B)E-B,\ \omega^{(k)}\in R^4, \tag{18}$$

$$\beta(C)=\lim_{k\to\infty}\left\|\omega^{(k)}\right\|. \tag{19}$$

Определим нижнюю границу $\alpha(B)$ матрицы B:

$$\alpha(B)=\beta(B)-\beta(C). \tag{20}$$

Итерации векторов $z^{(k)}$ и $\omega^{(k)}$ проводились до тех пор, пока не достигалась точность:

$$\left\|\left\|z^{(s+1)}\right\|-\left\|z^{(s)}\right\|\right\| \le \frac{1}{2}10^{-5},$$

$$\left\|\left\|\omega^{(p+1)}\right\|-\left\|\omega^{(p)}\right\|\right\| \le \frac{1}{2}10^{-5}.$$

Искомое значение чисел обусловленности вычислим по формуле

$$\nu(H_0) = \sqrt{\frac{\beta(B)}{\alpha(B)}}.$$

Методы решения задач Коши, предназначенные для определения блоков

$$U_{2j-1}^{(2j)} \text{ и } V_{2j-1}^{(2j)},$$

можно видоизменять таким образом, чтобы свойства, характеризующие метод Ньютона, сохранялись.

Заключение. Предложенная схема метода множественной двусторонней пристрелки позволяет решать широкие классы граничных задач с пограничным слоем. С помощью этой методики была решена нелинейная граничная задача Троеша. Данная задача считается достаточно трудной в вычислительном отношении, и, как правило, на ней проверяется работа предлагаемого метода.

Литература

1. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутта для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1983. 200 с.

2. Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1989. 312 с.

References

1. Dekker K., Verver Ya. *Ustoychivost' metodov Runge-Kutta dlya zhestkikh nelineynykh differrentsial'nykh uravneniy* [Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1983. 200 p.

2. Holl D., Uatt D. *Sovremennyye chislennyye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Modern numerical methods for solving ordinary differential equation]. Moscow, Mir Publ., 1989. 312 p.

Информация об авторе

Соловьева Ирина Федоровна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ira1234568@tut.by

Information about the author

Solov'yeva Irina Fedorovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ira1234568@tut.by

Поступила 07.03.2016